

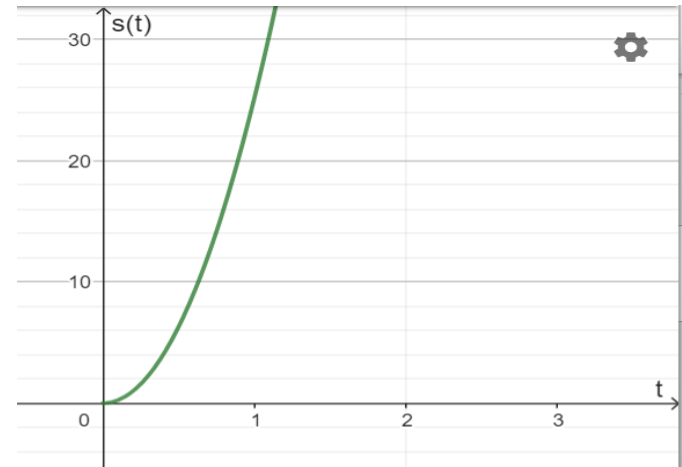
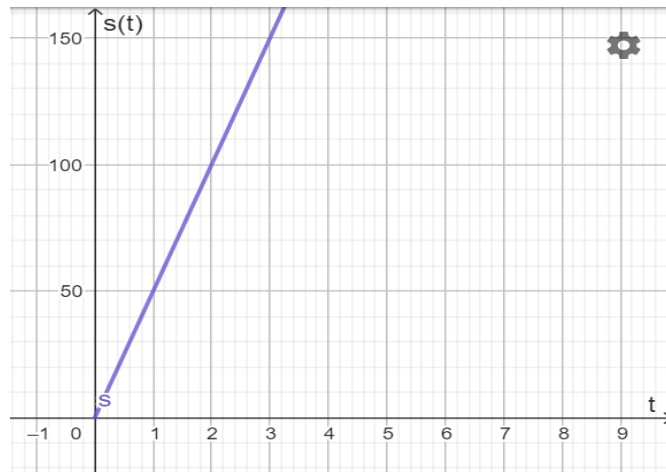
Από την παράγωγο στην παράγουσα και στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Τσαμπούκα Πετρούλα
ΣΕ Μαθηματικών

Αναφορά στην παράγωγο συνάρτησης μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα

Υπολογισμός ταχύτητας

Το αυτοκίνητο κινείται πάνω σε μία ευθεία και διανύει απόσταση που είναι συνάρτηση $s(t)$ του χρόνου.



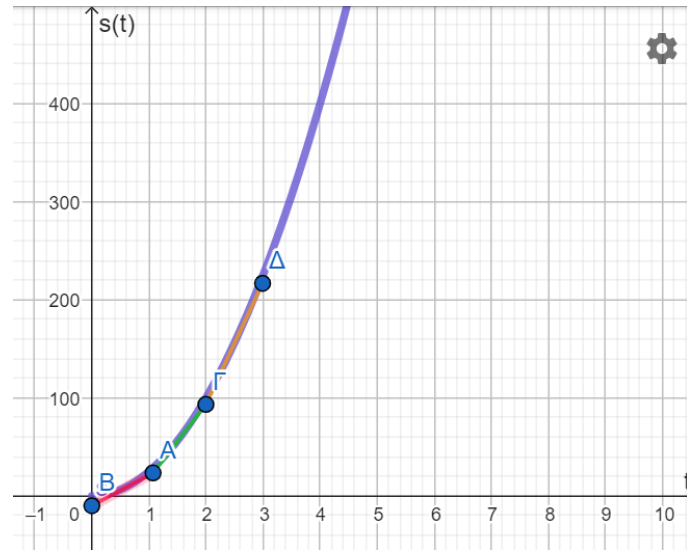
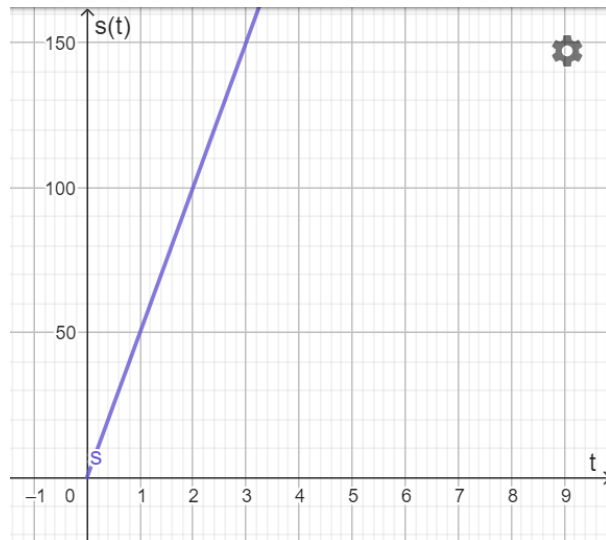
Μπορείτε να φανταστείτε το είδος της κίνησης (ομαλή, επιταχυνόμενη/επιβραδυνόμενη);

Στην περίπτωση της 1^{ης} γραφ. παρ. διανύει ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους.

Αναφορά στην παράγωγο συνάρτησης μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα

Υπολογισμός ταχύτητας

Το αυτοκίνητο κινείται πάνω σε μία ευθεία και διανύει απόσταση που είναι συνάρτηση $s(t)$ του χρόνου.



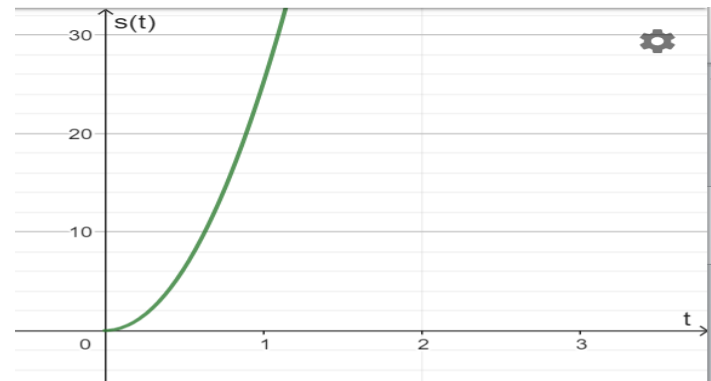
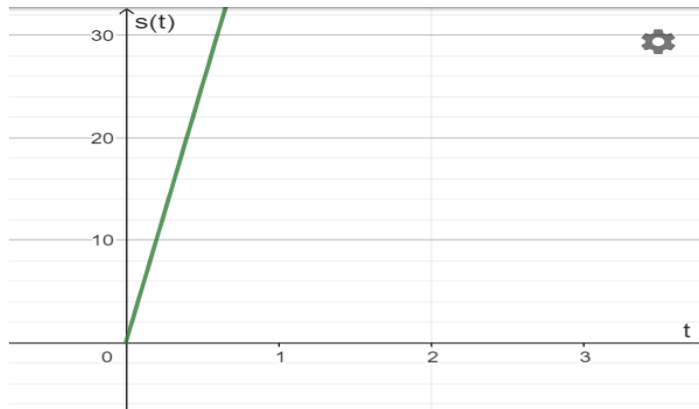
Στην περίπτωση της 1^{ης} γραφ. παρ. το κινητό διανύει ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους.

Στη 2^η περίπτωση προσεγγίζουμε τη γραφ. παρ. της καμπύλης με ευθ. τμήματα. Τι συμβαίνει με τις κλίσεις τους και τι δηλώνει αυτό σε σχέση με τα διαστήματα που διανύονται σε ίσους χρόνους;

Αναφορά στην παράγωγο συνάρτησης μέσα από ρεαλιστικά προβλήματα

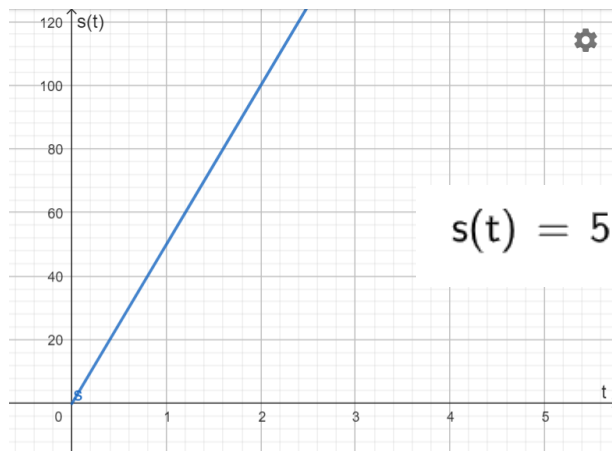
- Υπολογισμός ταχύτητας

Το αυτοκίνητο κινείται πάνω σε μία ευθεία και διανύει απόσταση που είναι συνάρτηση $S(t)$ του χρόνου.

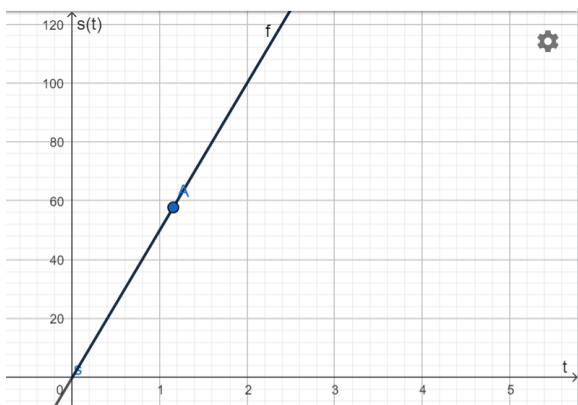


Στην περίπτωση της ταχύτητας μας ενδιαφέρει να βρούμε τι συμβαίνει **μία δεδομένη χρονική στιγμή**.

Στην περίπτωση της απόστασης έχουμε τη **συσσώρευση διαστημάτων που διανύθηκαν στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μέχρι μία δεδομένη χρον. στιγμή**.



$$s(t) = 50t, \quad (t \geq 0)$$

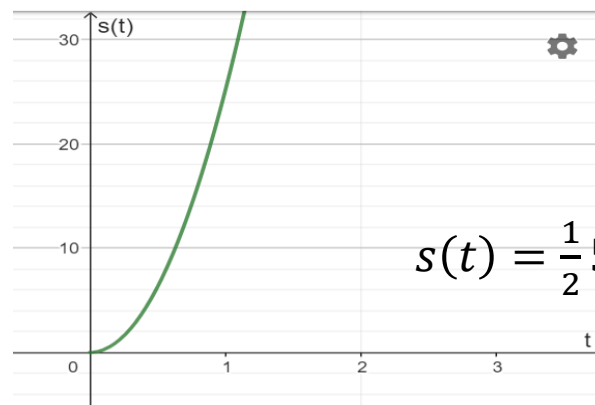


Πληροφορία για μια
δεδομένη χρονική
στιγμή λαμβάνουμε
παίρνοντας την
εφαπτομένη σ' ένα
σημείο της γραφ. παρ.

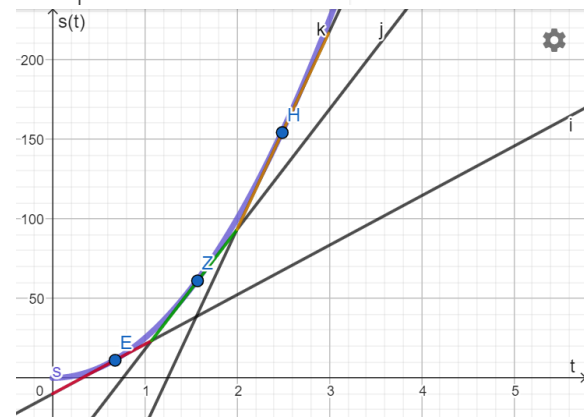
$$v(t) = s'(t) = 50, t \geq 0$$

Εντολές
Geogebra

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{Παράγωγος}(s(t)) \\ &= 50, \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$



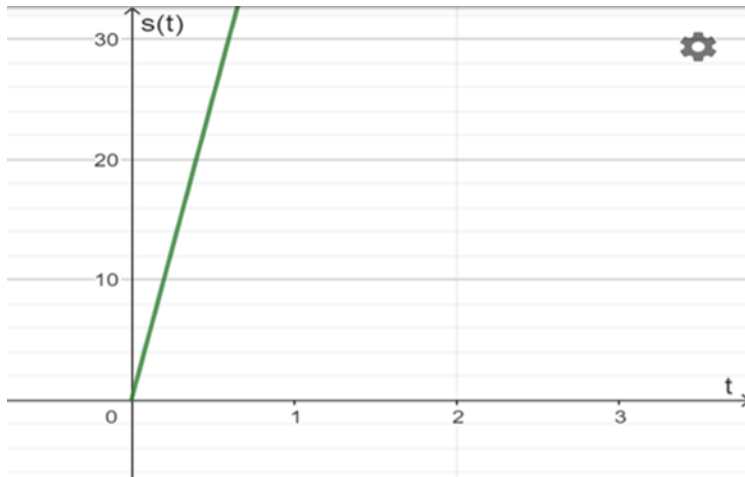
$$s(t) = \frac{1}{2} 50t^2, t \geq 0$$



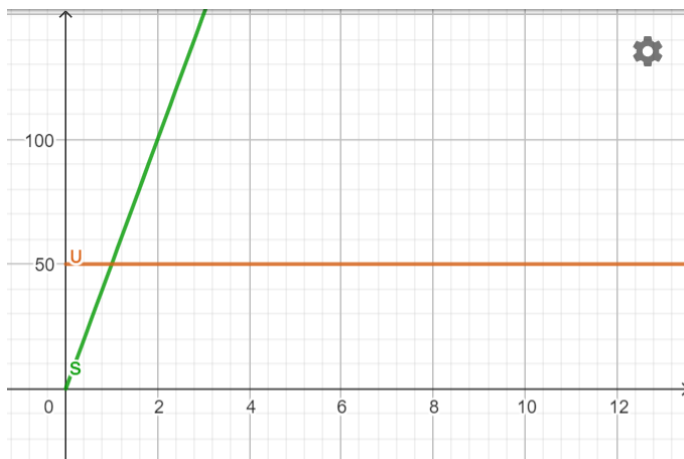
$$v(t) = s'(t) = 50t, t \geq 0$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{Παράγωγος}(s(t)) \\ &= 50t, \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

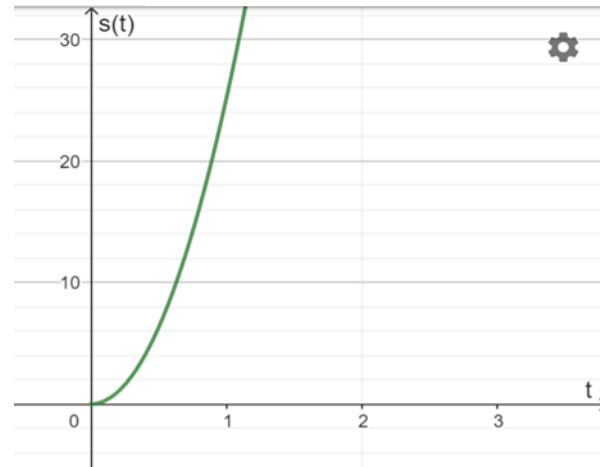
$$s(t) = 50t, \quad (t \geq 0)$$



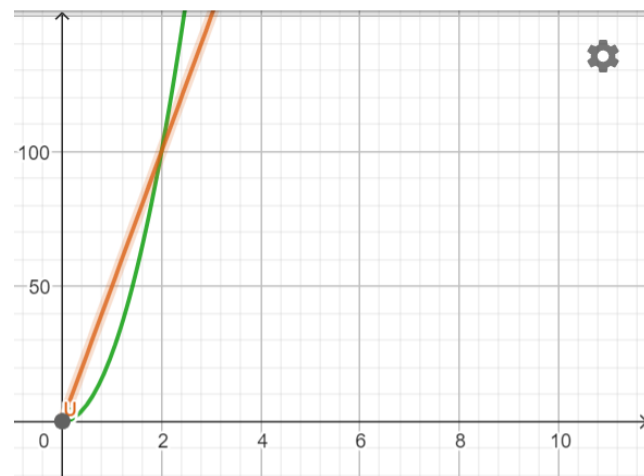
$$v(t) = s'(t) = 50, \quad t \geq 0$$



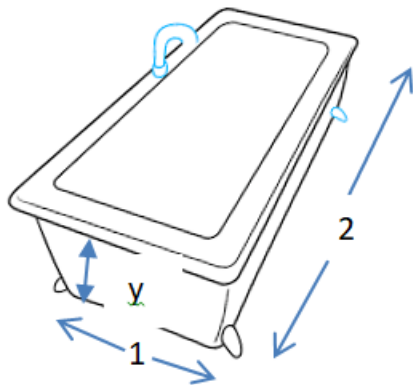
$$s(t) = \frac{1}{2} 50t^2, \quad t \geq 0$$



$$v(t) = s'(t) = 50t, \quad t \geq 0$$



Επιπλέον προβλήματα παραγώγου



Άδειασμα νερού από μπανιέρα ορθογώνιας διατομής δεδομένων διαστάσεων π.χ. 1m x 2m. Θεωρούμε ότι η στάθμη του νερού είναι στα y m.

Ποια είναι η έκφραση που δίνει τον όγκο του νερού σαν συνάρτηση του y ;

$$V(y) = 2y \text{ m}^3$$

Ανοίγουμε την τάπα της μπανιέρας και το νερό αρχίζει να ρέει.

- a) Ποιος είναι ο ρυθμός μείωσης του όγκου σαν συνάρτηση της στάθμης y ;
- b) Αν ο ρυθμός μείωσης της στάθμης του νερού είναι σταθερός και ίσος με $\kappa \text{ m/sec}$ ποιος είναι ο ρυθμός μείωσης του όγκου σαν συνάρτηση του χρόνου t ;

Απ. a) $V'(y) = 2 \text{ m}^2$

b) $V'(t) = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = 2\kappa \text{ m}^3/\text{sec}$

Αντιμετάθεση των δεδομένων

Γνωρίζουμε την ταχύτητα ή το ρυθμό μείωσης και αναζητούμε την απόσταση ή τον όγκο της δεξαμενής.

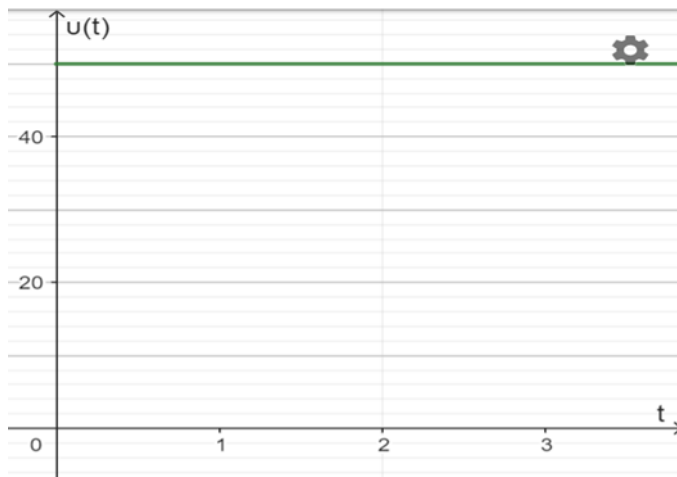
Έχουμε προβλήματα της μορφής

$$v(t) = k \quad \text{ή} \quad v(t) = kt, \quad \text{όπου } k \text{ σταθερά}$$

$$v(t) = 50 \text{ m/sec} \text{ (Τι σημαίνει αυτό;)}$$

Έχοντας τον τύπο που δίνει την ταχύτητα αναζητούμε την απόσταση που διανύθηκε.

Η απόσταση υπολογίζεται σαν τη συσσώρευση της επίδρασης που έχει η ταχύτητα στα διαστήματα που διανύει το κινητό.

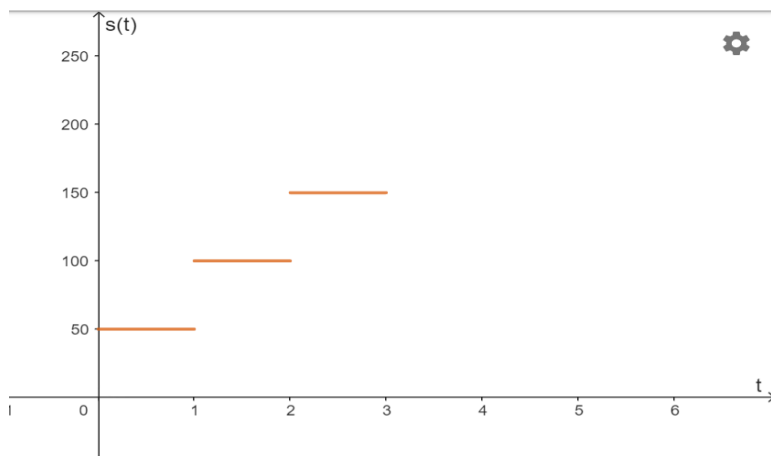


Από 0 έως 1 sec το αυτοκίνητο διανύει απόσταση 50m . Έχοντας ήδη διανύσει 50m από 1 έως 2sec το αυτοκίνητο διανύει ακόμη 50m κ.ο.κ

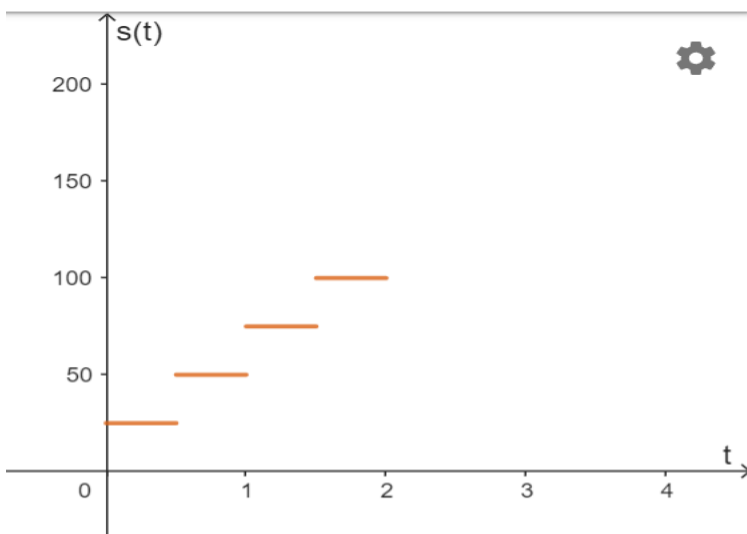
Μπορούμε γραφικά να αποδώσουμε την απόσταση που διανύει το αυτοκίνητο ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία;

Εντολές Geogebra

$$s(t) = A\nu(0 \leq t \leq 1, 50, 1 < t \leq 2, 100, 2 < t \leq 3, 150)$$

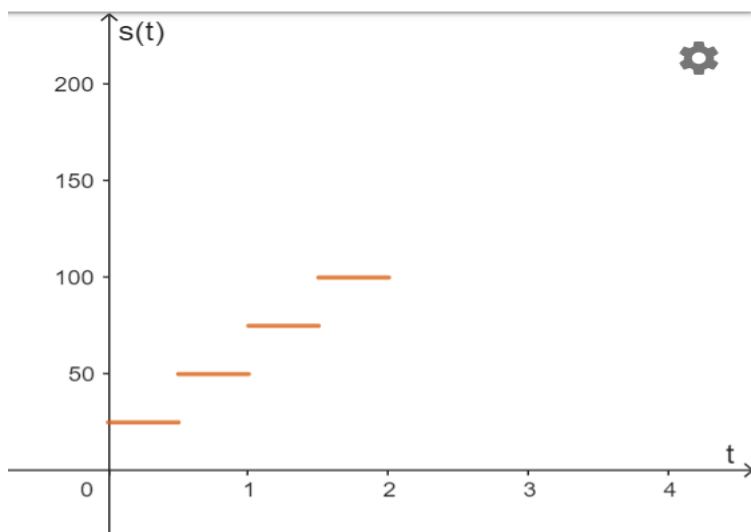


$$s(t) = \begin{cases} 50 & : 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & : 1 < t \leq 2 \\ 150 & : 2 < t \leq 3 \end{cases}$$



Μελετώ την επίδραση της ταχύτητας
στον υπολογισμό της απόστασης σε
μικρότερα χρονικά διαστήματα.

$$s(t) = \begin{cases} 25 & : 0 \leq t \leq 0.5 \\ 50 & : 0.5 < t \leq 1 \\ 75 & : 1 < t \leq 1.5 \\ 100 & : 1.5 < t \leq 2 \end{cases}$$



$$s(t) = \begin{cases} 25 & : 0 \leq t \leq 0.5 \\ 50 & : 0.5 < t \leq 1 \\ 75 & : 1 < t \leq 1.5 \\ 100 & : 1.5 < t \leq 2 \end{cases}$$

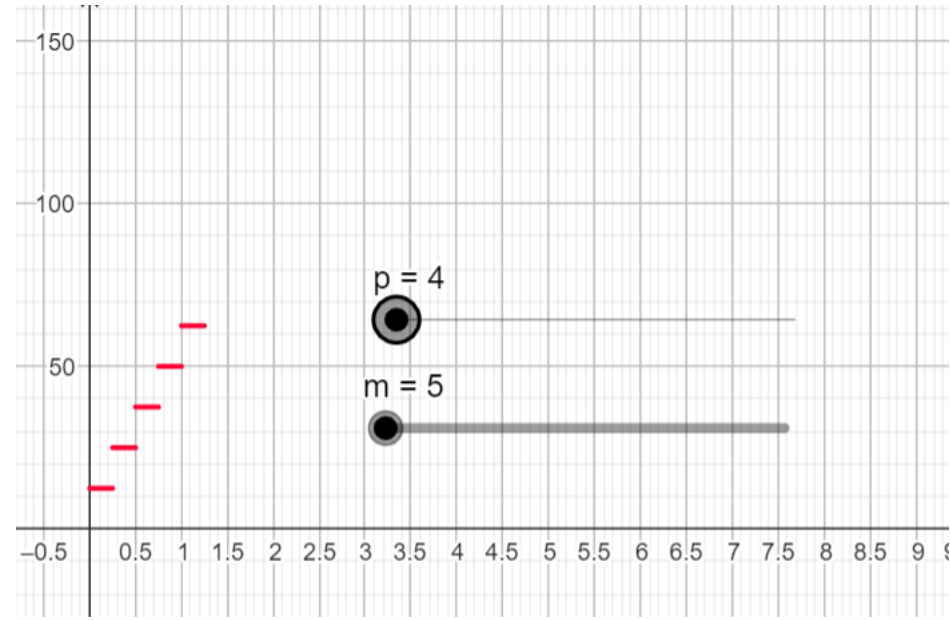
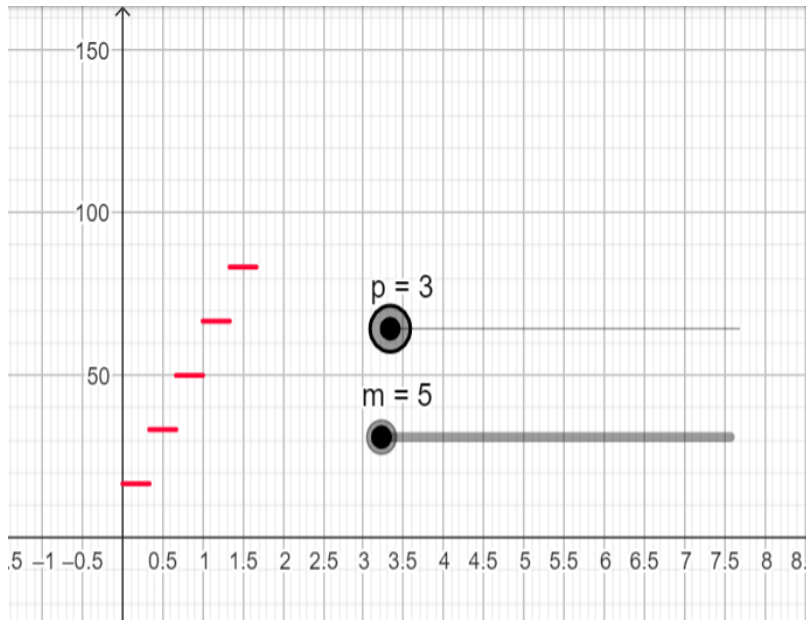
Ερ1. Τι θα πρέπει να κάνουμε για να πάρουμε μία καλύτερη προσέγγιση των αποστάσεων που έχουν διανυθεί ως αποτέλεσμα της ταχύτητας του αυτοκινήτου;

Απ1. Θα πρέπει να μειώσουμε τα επιμέρους χρονικά διαστήματα στα οποία μελετούμε την επίδραση της ταχύτητας, δηλ $0 \leq t \leq 0.25$, $0.25 \leq t \leq 0.5$, κ.ο.κ.

Ερ2. Τι αναμένουμε να συμβεί στη γραφική παράσταση της απόστασης ως προς το χρόνο; Συγκεκριμένα τι θα συμβεί στο μήκος των ευθ. τμημάτων που η τεταγμένη τους δίνει την απόσταση που διανύθηκε σε ένα χρονικό διάστημα και στην κατακόρυφη απόσταση που έχουν τα ευθ. τμήματα μεταξύ τους;

Απ2. Το μήκος τους θα μειωθεί, το ίδιο και η απόσταση μεταξύ τους.

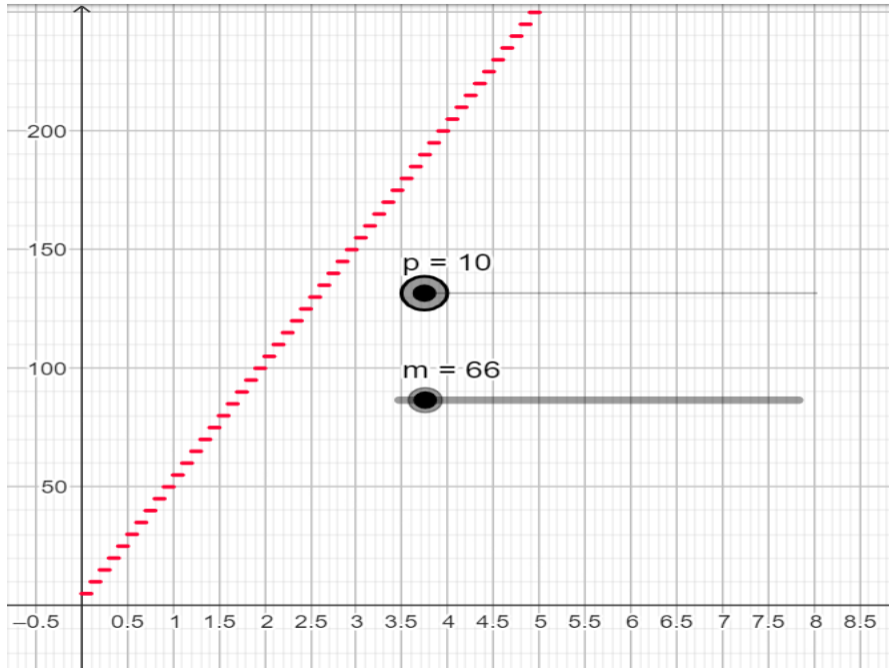
Γραφικό αποτέλεσμα της μείωσης των χρονικών διαστημάτων



Ερ3. Ποιος από τους 2 δρομείς καθορίζει τη συνολική διάρκεια του χρόνου κατά την οποία μελετάμε την επίδραση της ταχύτητας;

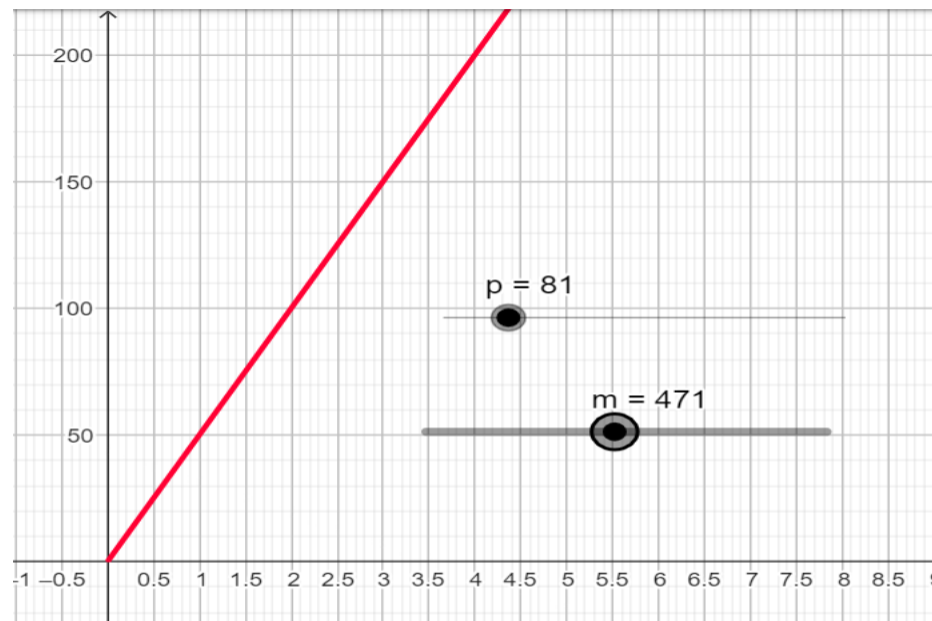
Ερ4. Ο άλλος δρομέας τι καθορίζει;

Ερ5. Ποιον δρομέα πρέπει να μετακινήσουμε για να καταλήξουμε στο όριο το εύρος των χρονικών διαστημάτων στα οποία χωρίζουμε τη συνολική χρονική διάρκεια να πλησιάζει το 0;



Ερ. 6 Τι παρατηρείτε ως προς τη συνέχεια της συνάρτησης της απόστασης ως προς το χρόνο;

Ερ. 7 Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί σε σχέση με τη συνέχεια όταν ο δρομέας p λάβει πολύ μεγάλες τιμές που προσεγγίζουν το άπειρο;



Ερ.8 Τι παριστάνει η γραφ. παράσταση του $s(t)$;

Ερ. 9 Ποια είναι η εξίσωση της;

Μετάβαση από την παράγωγο στην παράγουσα

- Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει :

$$f(x) = g(x) + c$$

f, g συνεχείς, x εσωτερικό σημείο

$$s'(t) = g'(t) \Rightarrow s(t) = g(t) + c$$

 $g'(t)$

$$v(t) = s'(t) = 50$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε με τη διαμέριση του χρονικού διαστήματος για τον υπολογισμό της ταχύτητας αντιστοιχεί στον υπολογισμό της παράγουσας (αρχικής συνάρτησης).

Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση είναι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $F(x)$ που η παράγωγός της είναι η $f(x)$, δηλ.

$$F'(x) = f(x)$$

Στην περίπτωσή μας αναζητούμε συνάρτηση $g(t)$ τέτοια ώστε $g'(t) = 50$

Προϋποθέσεις: f, g συνεχείς, x εσωτερικό σημείο

$$s'(t) = g'(t) \Rightarrow s(t) = g(t) + c$$

$$v(t) = s'(t) = 50 \quad \swarrow g'(t)$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε με τη διαμέριση του χρονικού διαστήματος για τον υπολογισμό της ταχύτητας αντιστοιχεί στον υπολογισμό της παράγουσας ή της αρχικής συν.

$$s(t) = 50t + \text{○}$$

Τι αντιπροσωπεύει η σταθερά που εμφανίζεται;

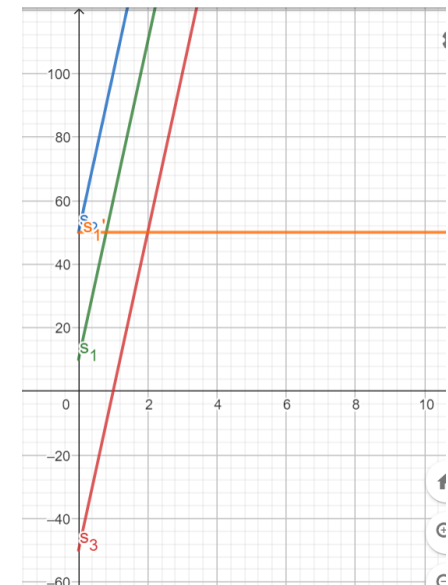
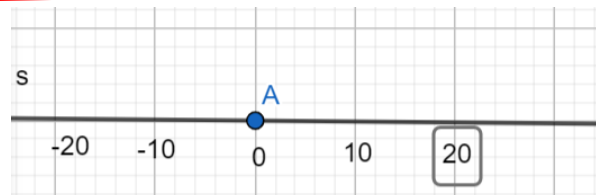
$$s_1(t) = 50t + 10, \quad (t \geq 0)$$

Το +10 δηλώνει ότι για $t=0$ βρίσκεται σε απόσταση 10 μον. δεξιότερα του σημείου αναφοράς Α.

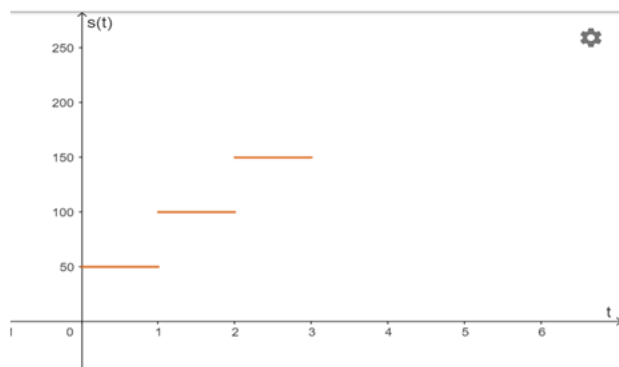
$$s_2(t) = 50t + 50, \quad (t \geq 0)$$

$$s_3(t) = 50t - 50, \quad (t \geq 0)$$

Το -50 δηλώνει ότι για $t=0$ βρίσκεται 50 μον. αριστερότερα του σημείου αναφοράς Α.



Πού υποκρύπτεται η ύπαρξη της σταθεράς στη διαδικασία διαμέρισης του χρονικού διαστήματος;

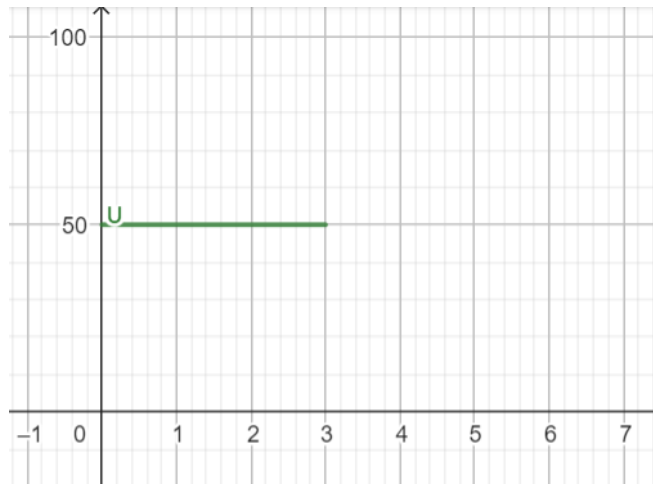


$$s(t) = \begin{cases} 50 & : 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & : 1 < t \leq 2 \\ 150 & : 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Θεωρήσαμε ότι για χρόνο από 0 έως 1 το κινητό βρίσκεται 50m δεξιότερα από το σημείο αναφοράς. Εδώ έγινε η υπόθεση ότι τη χρονική στιγμή 0 το κινητό βρίσκεται πάνω στο σημείο αναφοράς.

Άρα η σταθερά ενσωματώνει την πληροφορία για τις αρχικές συνθήκες που ισχύουν για κάθε πρόβλημα.

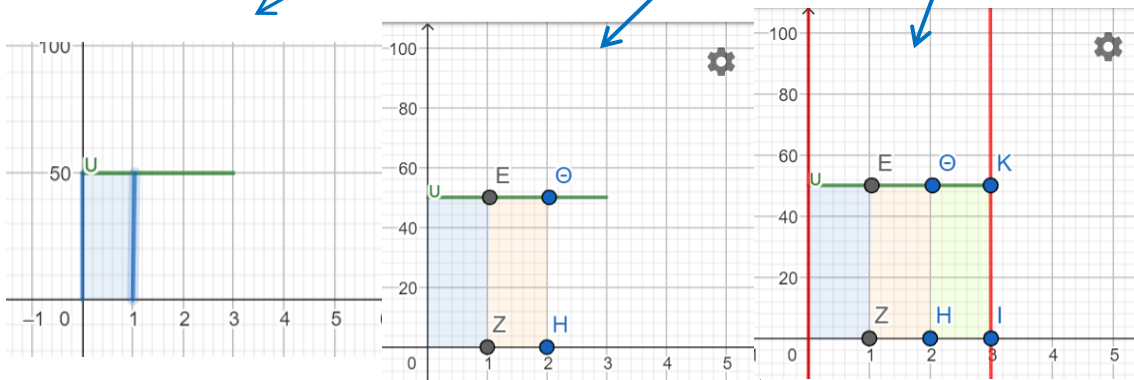
Σύνδεση της Παράγουσας με το Ορισμένο Ολοκλήρωμα



Θεωρούμε για μια ακόμη φορά τη συνάρτηση $u(t)=50$ με τον περιορισμό $0 \leq t \leq 3$.

$$s(t) = \begin{cases} 50 & : 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & : 1 < t \leq 2 \\ 150 & : 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Οι αποστάσεις που διανύθηκαν στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος ισοδυναμούν με τα μερικά αθροίσματα των εμβαδών ορθογωνίων που ορίζονται από 2 χρονικές τιμές t_1 και t_2 πάνω στον άξονα των xx' και την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης $u(t_1) = u(t_2)$.



Καταλήξαμε στο εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τη γραφ. παράσταση της συνάρτησης και τις ευθείες $x=0$ και $x=3$.

Ισχύει το ίδιο και σε μια άλλη συνάρτηση, όπως $v(t) = 50t$, ($0 \leq t \leq 3$) ;

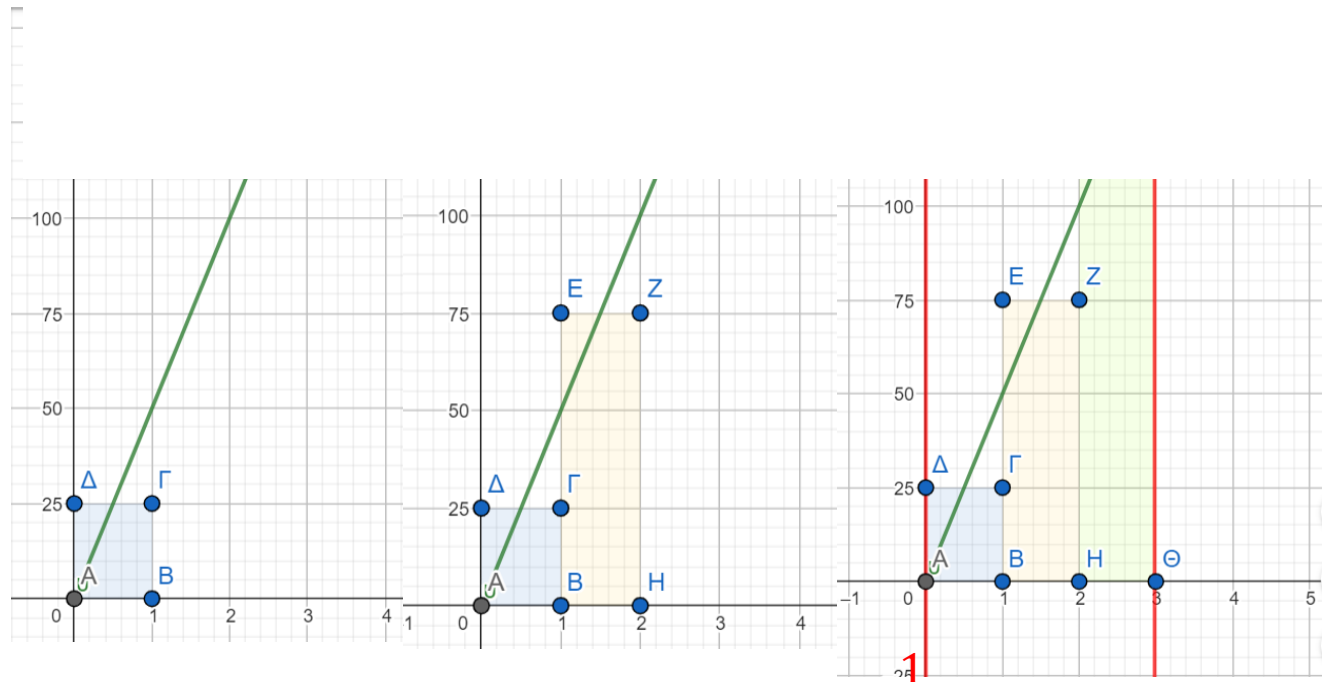
Οι αποστάσεις που διανύει το κινητό σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς κάθε sec δίνονται από τη λίστα $s(t) = \{25, 100, 225\}$.

Οι αποστάσεις που διανύθηκαν στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος ισοδυναμούν με τα μερικά αθροίσματα των εμβαδών ορθογωνίων που ορίζονται από 2 χρονικές τιμές t_1 και t_2 πάνω στον άξονα των xx' και την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης $t = \frac{t_2 - t_1}{2}$.

ιε ότι
κλίση της
του
α
ε σχέση

με τη κλίση που
ορίζεται από τη γραφ.
παρ. της συνάρτησης,
τον άξονα xx' και τις
ευθείες $x=0$ και $x=3$

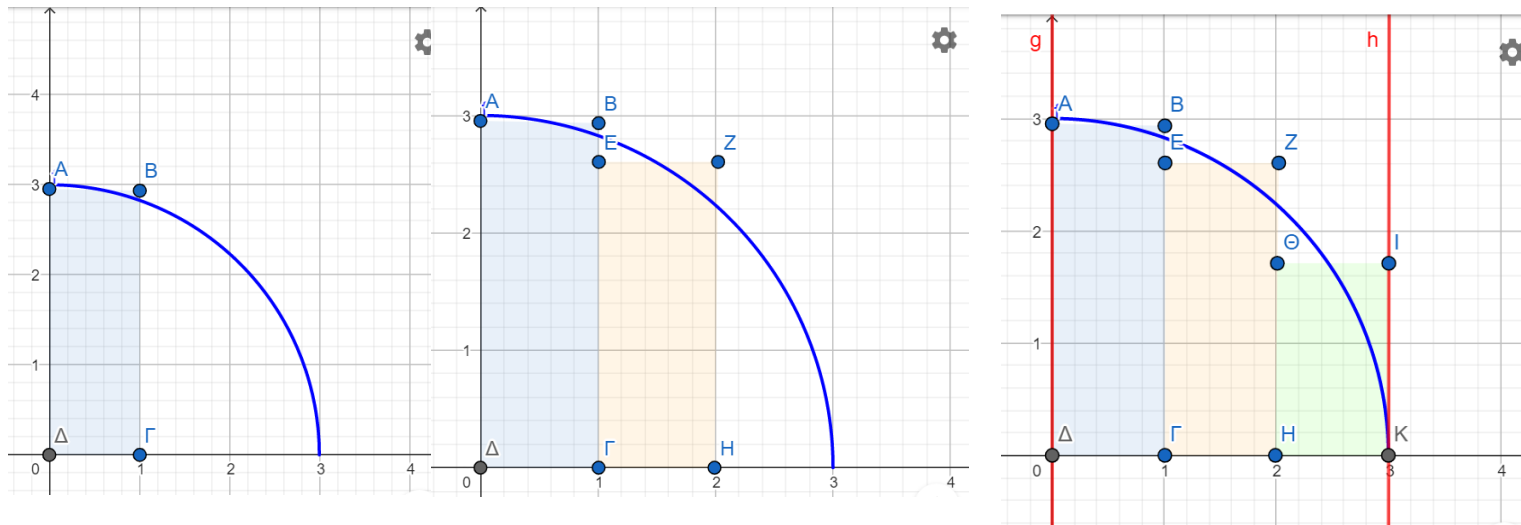
Υπάρχει τελικά
διαφοροποίηση στα
εμβαδά των ορθογωνίων
και του εμβαδού κάτω
από τη γραφ. παρ.;



$$\delta = E_{\text{ορθ}} - E_{\text{γρ}} = (25 + 75 + 125) - \frac{1}{2} 3 \cdot 150 = 225 - 225 = 0$$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$, $0 \leq t \leq 3$

Οι αποστάσεις που διανύει το κινητό σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς κάθε sec δίνονται από τη λίστα $s(t) = \{2.96, 5.56, 7.21\}$.

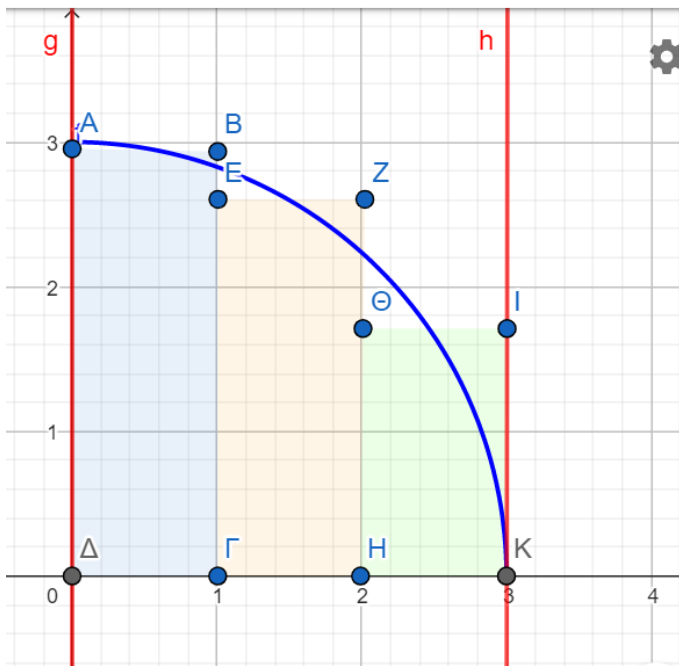


$$E_{\theta} \approx 2.96 + 2.6 + 1.6 = 7.2$$

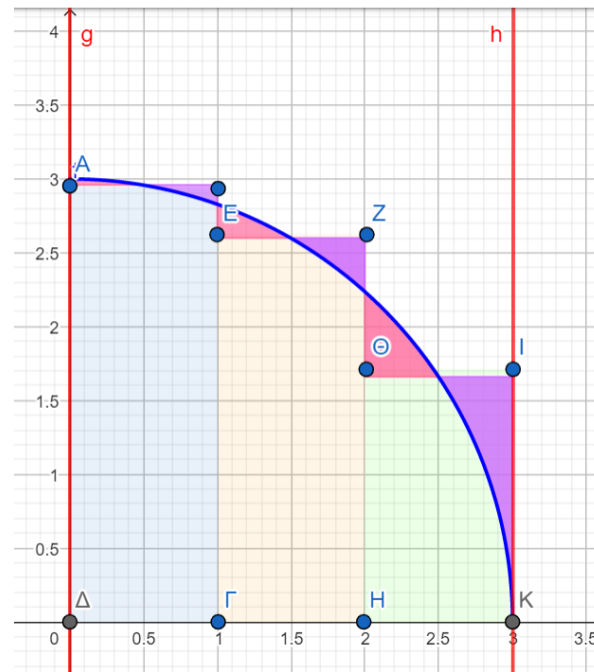
Ποιο είναι το σφάλμα σε σχέση με το εμβαδόν κάτω από τη γραφ. παράσταση;

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$, $0 \leq t \leq 3$

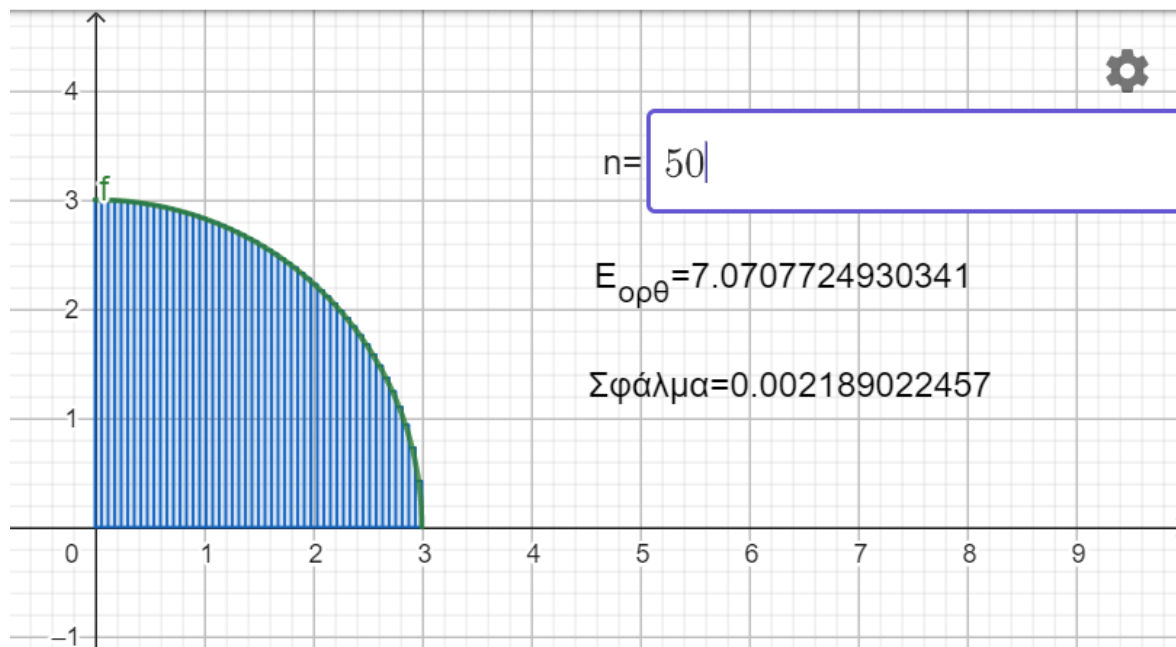
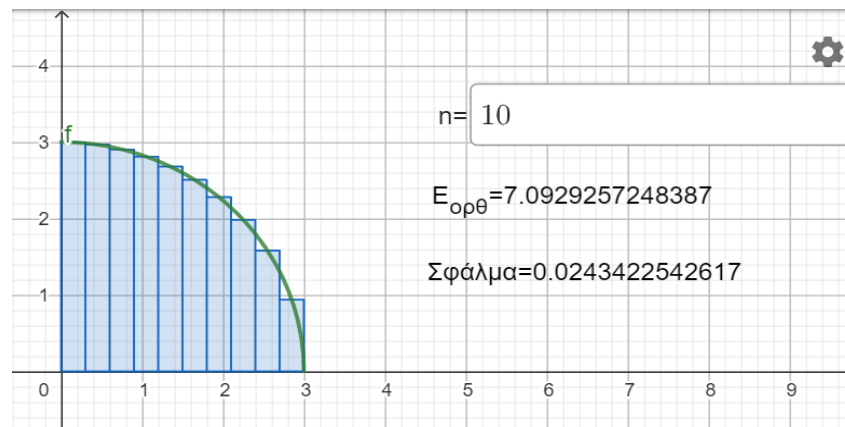
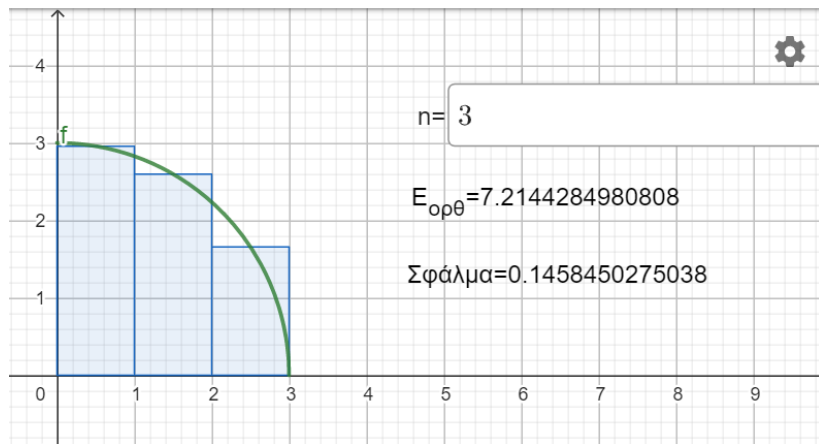
Ποιο είναι το σφάλμα σε σχέση με το εμβαδόν κάτω από τη γραφ. παράσταση;



$$E_{o\rho\theta} \approx 2.958 + 2.598 + 1.658 = 7.2144$$



$$\begin{aligned} E_{\sigma\varphi} &= E_{o\rho\theta} - E_{\gamma\rho.\pi\alpha\rho} = 7.21 - \frac{1}{4}\pi\rho^2 \\ &= 7.21 - 7.069 = 0.141 \end{aligned}$$

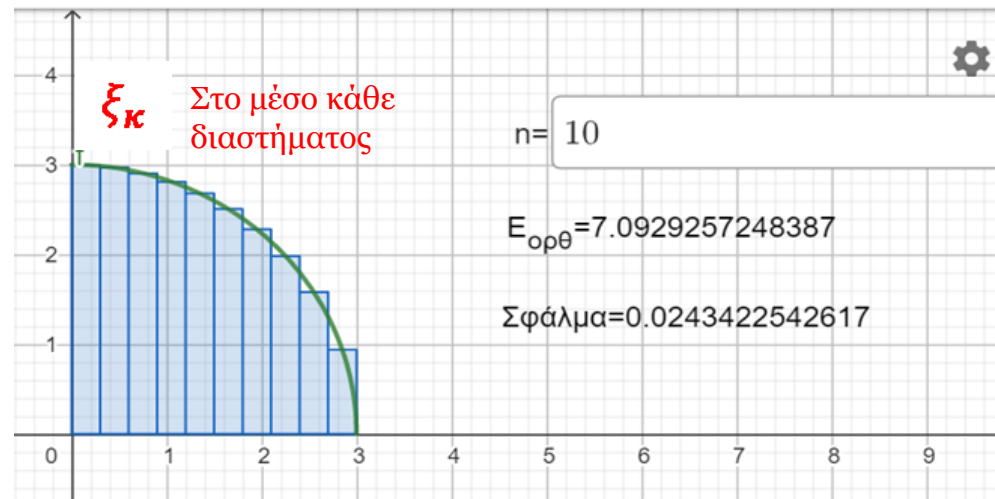
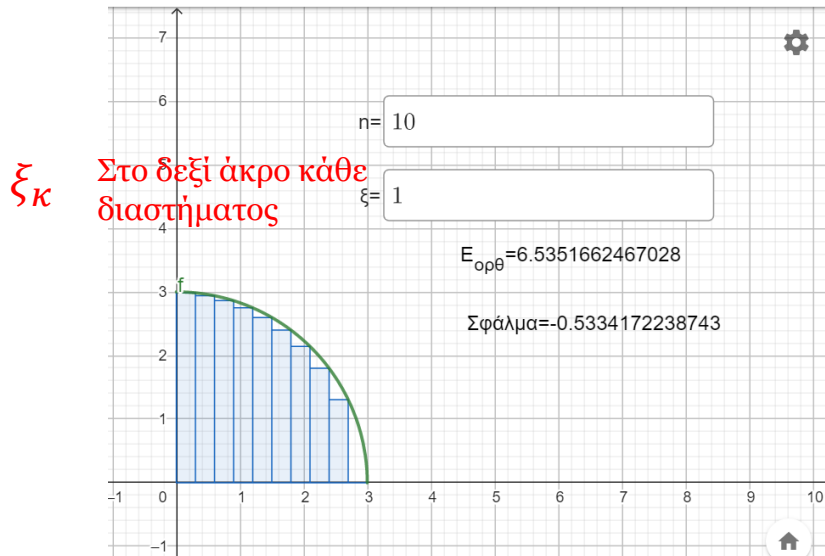


- Θεωρήσαμε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής.
- Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφ. παρ. της συνάρτησης και του άξονα xx' που ορίζεται από τις ευθείες $x=a$ και $x=b$ χωρίσαμε το διάστημα $b-a$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα.
- Τα ισομήκη διαστήματα έχουν μήκος $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Επιλέξαμε τα σημεία ξ_k τα οποία ανήκουν στο μέσο των υποδιαστημάτων.
- Υπολογίσαμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που ορίζονται με βάση το Δx και ύψος $f(\xi_k)$, το οποίο είναι

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$$

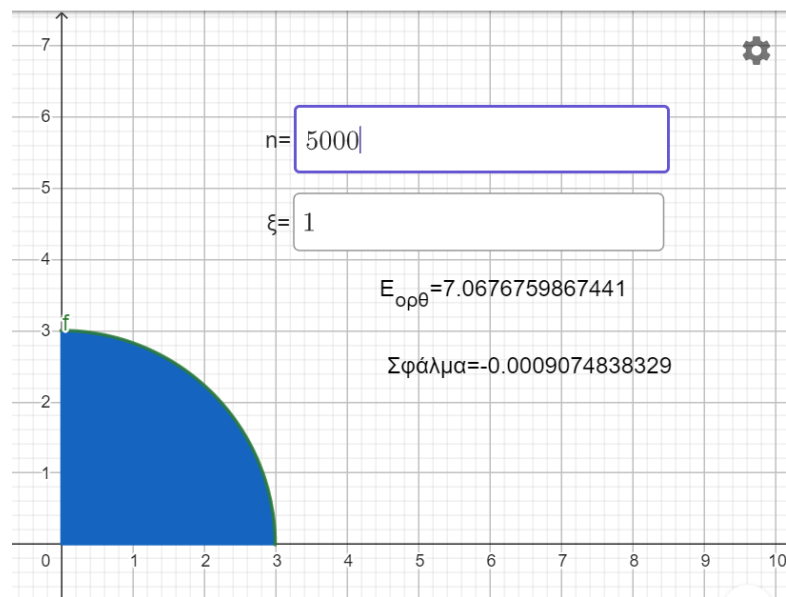
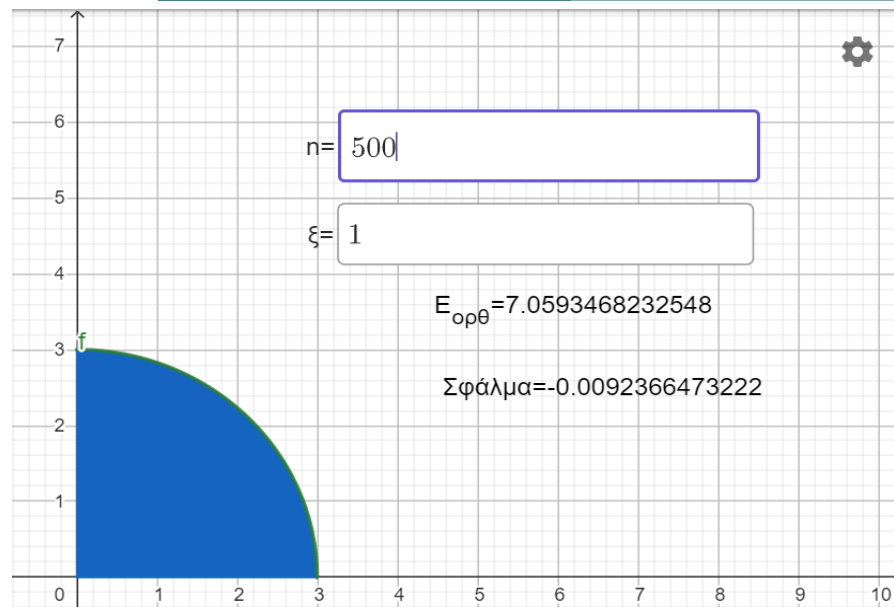
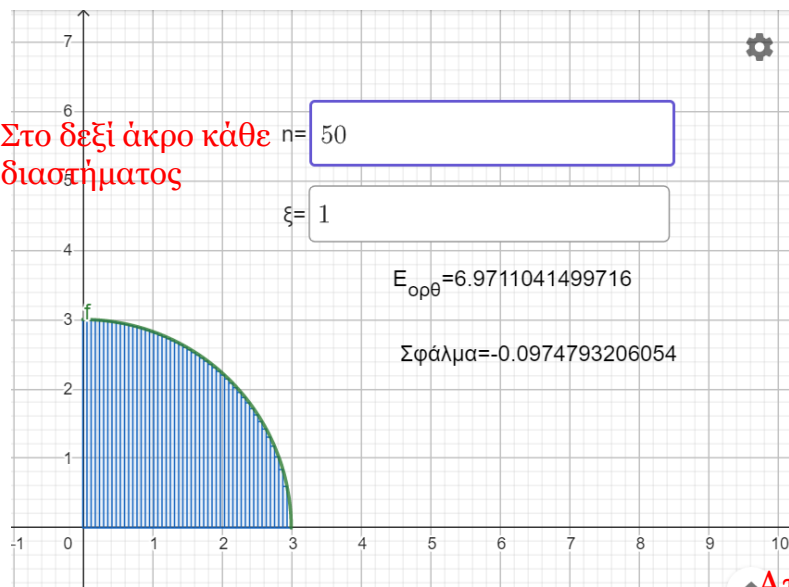
- Διαπιστώσαμε ότι καθώς $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = E$

Τι θα συμβεί αν επιλέξουμε σημεία που δεν ανήκουν στο μέσο των υποδιαστημάτων ;



ξ_k

Στο δεξί άκρο κάθε διαστήματος



Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των εμβαδών

$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$ (άθροισμα Riemann) στο όριο $n \rightarrow +\infty$, δηλ.

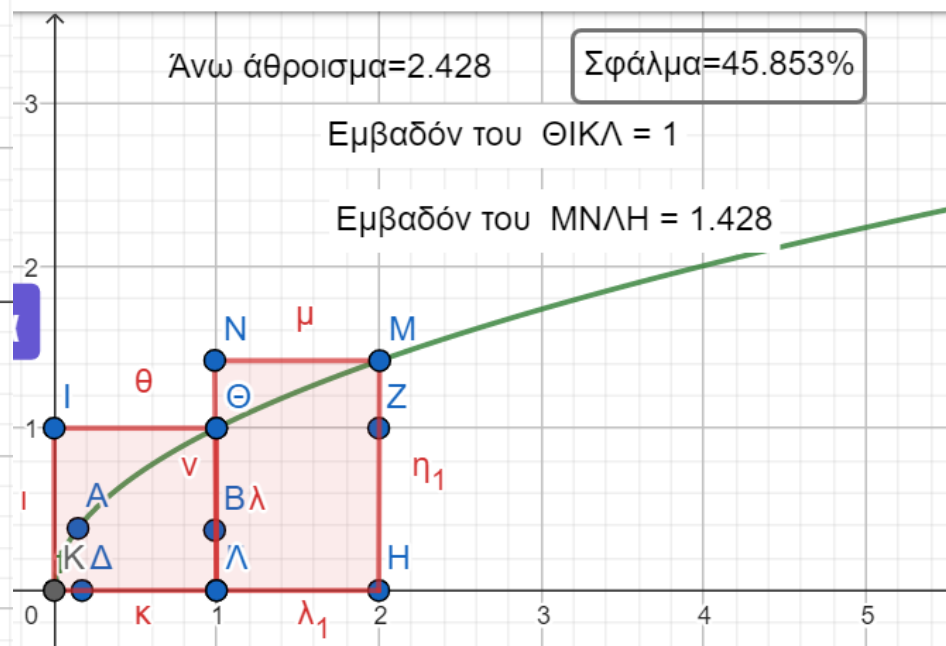
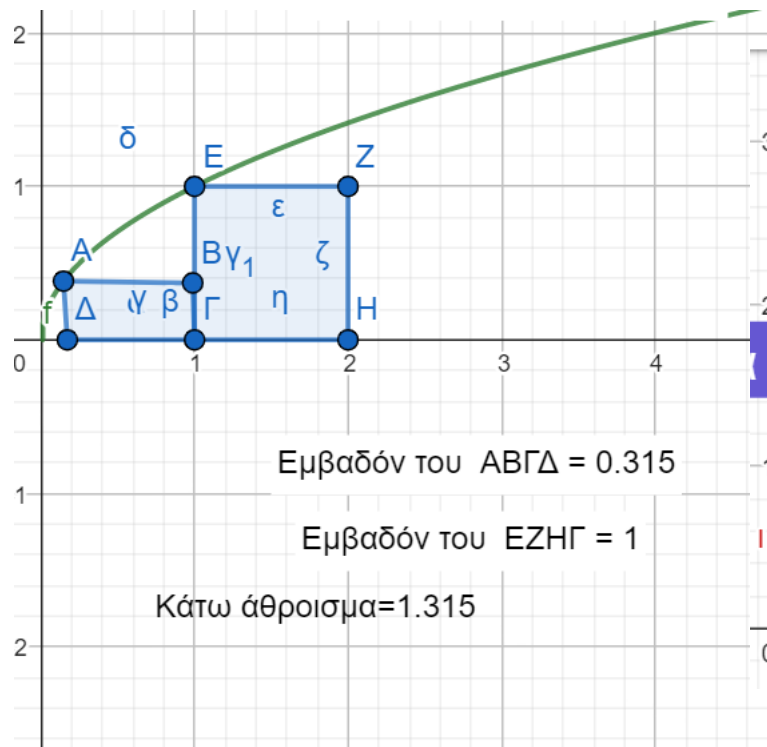
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k .

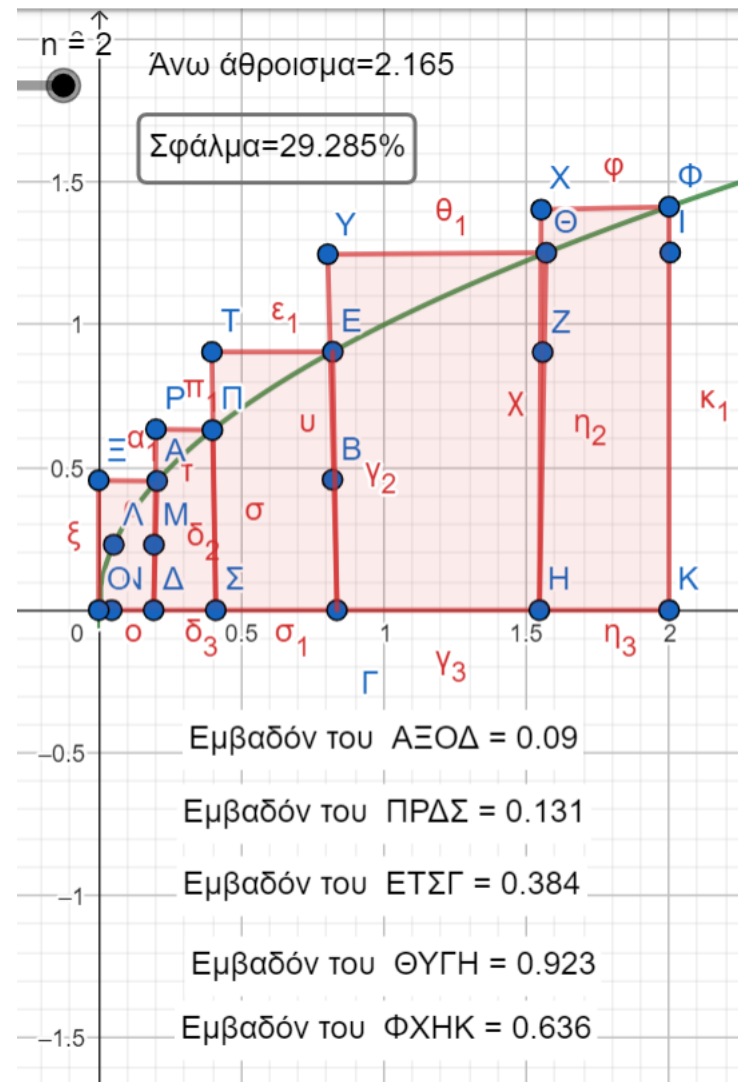
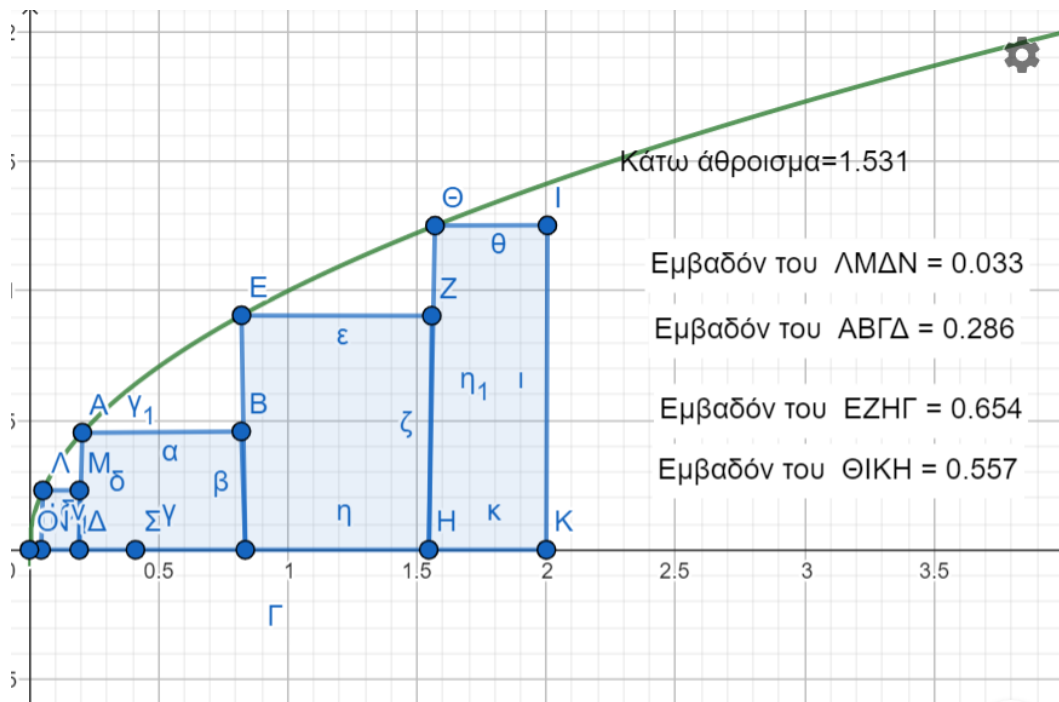
Το όριο αυτό είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f και συμβολίζεται με

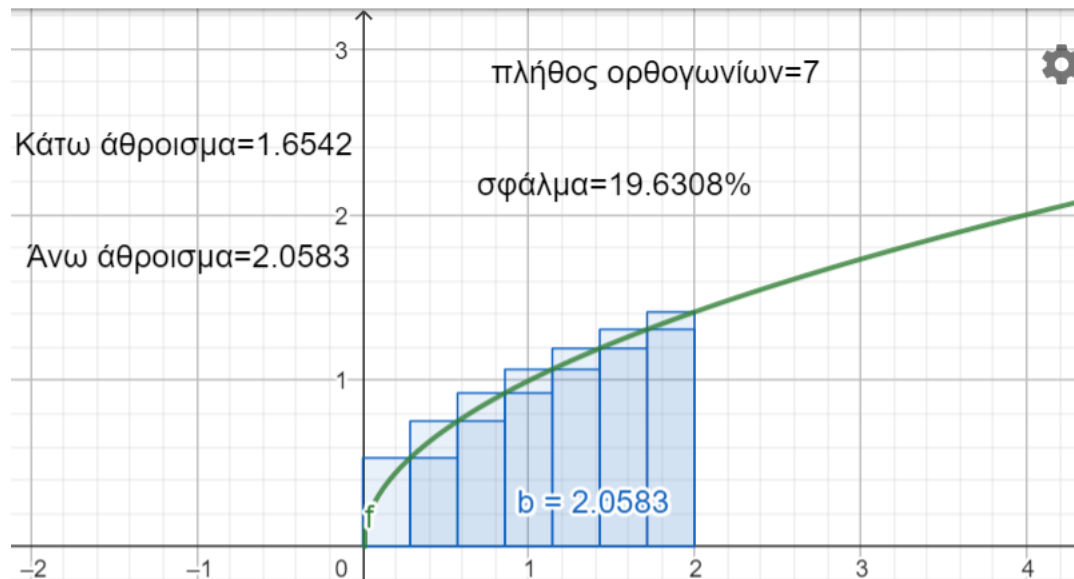
$$\int_a^b f(x) dx$$

Υπολογισμός του εμβαδού από $x=0$ έως $x=2$ σε 1^η προσέγγιση.



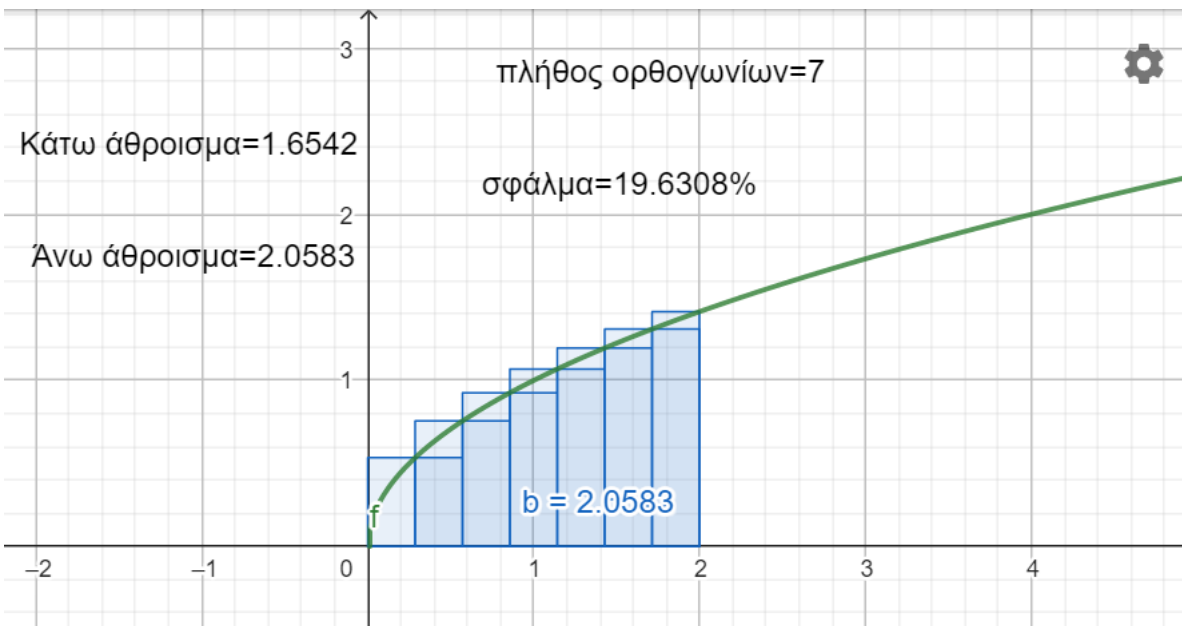
Υπολογισμός του εμβαδού από $x=0$ έως $x=2$ σε 2^η προσέγγιση.





- Στη μία προσέγγιση τα ύψη των ορθογωνίων προσδιορίζονται από την τιμή του αριστερού άκρου.
(υποπροσδιορισμός του εμβαδού- Κάτω φράγμα της πραγματικής τιμής του εμβαδού)
- Στην άλλη προσέγγιση τα ύψη των ορθογωνίων προσδιορίζονται από την τιμή του δεξιού άκρου.
(υπερπροσδιορισμός του εμβαδού- Άνω φράγμα της πραγματικής τιμής του εμβαδού)

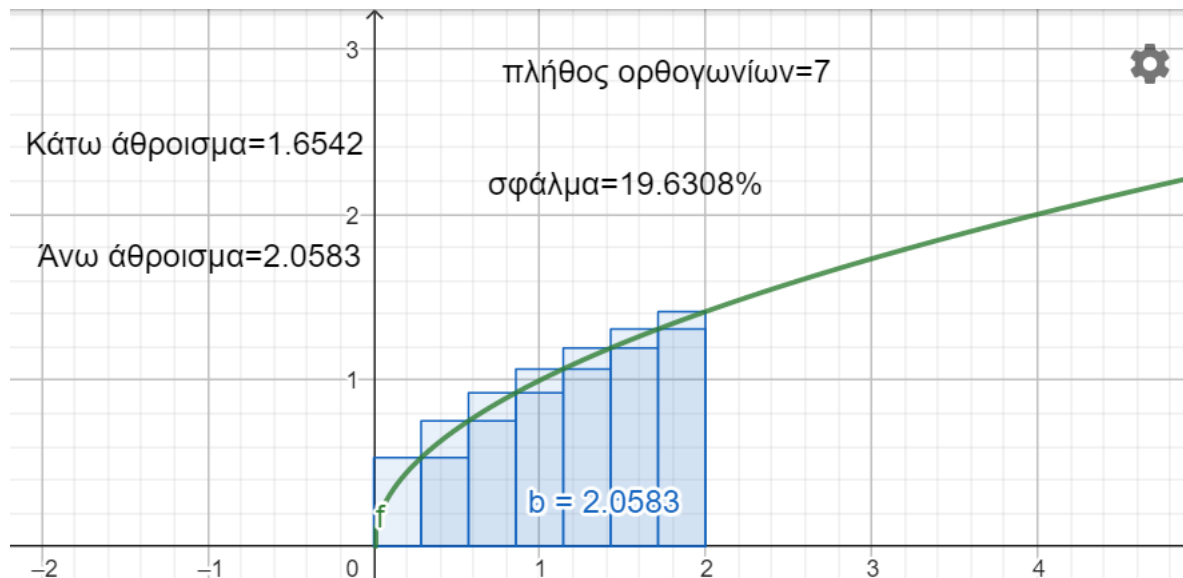
$$\sum_{\xi_k \text{ αριστερα ακρα}}^n f(\xi_k) \Delta x \leq E \leq \sum_{\xi_k \text{ δεξια ακρα}}^n f(\xi_k) \Delta x$$



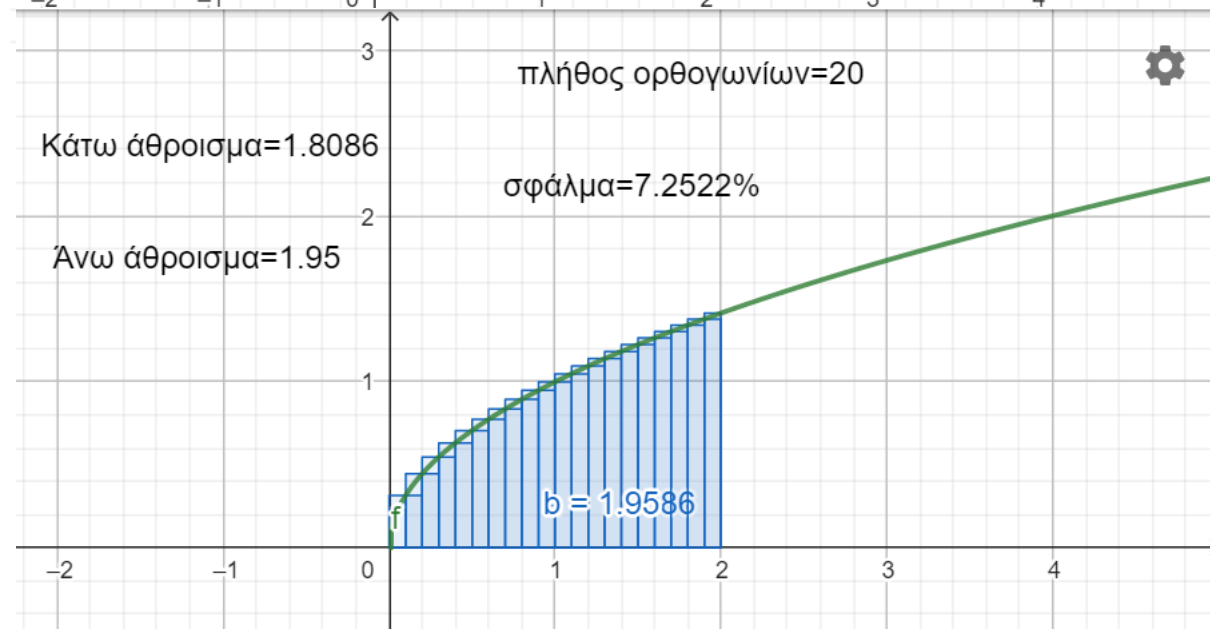
Πλήθος ορθογωνίων	7	20
Κάτω άθροισμα	1,65	
Άνω άθροισμα	2,06	
Σφάλμα	19,63%	

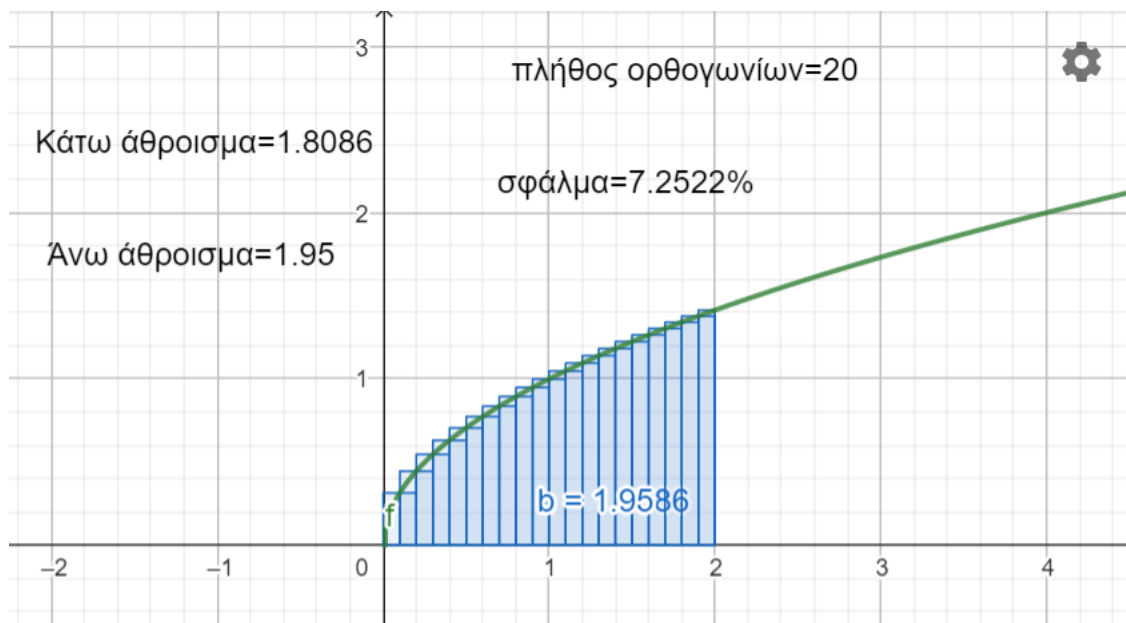
Ερ. Τι θα συμβεί με την τιμή του κάτω φράγματος καθώς μειώνουμε το διάστημα Δx της διαμέρισης;

Ερ. Τι θα συμβεί με την τιμή του άνω φράγματος καθώς μειώνουμε το διάστημα Δx της διαμέρισης;



Πλήθος ορθογωνίων	7	20
Κάτω άθροισμα	1,65	1,81
Άνω άθροισμα	2,06	1,95
Σφάλμα	19,63%	7,25%





Πλήθος ορθογωνίων	7	20
Κάτω άθροισμα	1,65	1,81
Άνω άθροισμα	2,06	1,95
Σφάλμα	19,63%	7,25%

Αποδεικνύεται ότι για τα αθροίσματα των εμβαδών $\sum_{\xi_k}^n$ αριστερα ακρα $f(\xi_k)\Delta x$

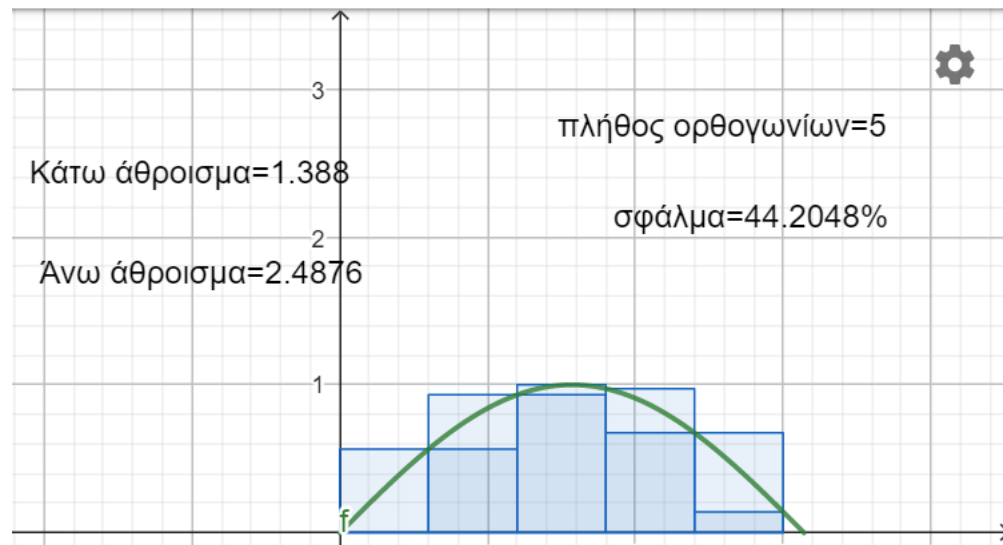
(κάτω άθροισμα Darboux) και $\sum_{\xi_k}^n$ δεξια ακρα $f(\xi_k)\Delta x$ (άνω άθροισμα Darboux) στο όριο $n \rightarrow +\infty$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\xi_k \text{ αριστερα ακρα}}^n f(\xi_k)\Delta x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\xi_k \text{ δεξια ακρα}}^n f(\xi_k)\Delta x = E$$

Ερ. Τι θα αλλάξει αν χρησιμοποιήσουμε μια μη μονότονη συνάρτηση;
 Πώς θα προσδιοριστούν τα ξ_k έτσι ώστε με το κάτω άθροισμα Darboux να έχουμε υποπροσδιορισμό του εμβαδού και με το άνω άθροισμα Darboux να έχουμε υπερπροσδιορισμό του εμβαδού ;

Επιλέγουμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \eta\mu(t), \quad (\pi \geq t \geq 0)$$



$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \leq E \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

where ξ_k τ.ω $f(\xi_k) = \min_{x \in \text{διαστήμα } k} f(x)$ and ξ_k τ.ω $f(\xi_k) = \max_{x \in \text{διαστήμα } k} f(x)$

Αποδεικνύεται ότι στο όριο $n \rightarrow +\infty$ τα αθροίσματα θα τείνουν στο εμβαδόν E.

Ερ. Κερδίζω κάτι από την προσέγγιση του εμβαδού μέσω αθροισμάτων Darboux σε σχέση με την προσέγγιση μέσω αθροισμάτων Riemann;

Συνάρτηση	Παράγουσα
$\eta\mu(t)$	$-\sigma\upsilon\nu(t) + c$
te^{-t}	$-te^{-t} - e^{-t} + c$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\tan^{-1} t + c$
(Αντιστοιχεί σε ελλειπτικό 1 ^{ου} είδους) $\frac{1}{\sqrt{1-0,25\eta\mu^2 t}}$	?
(Αντιστοιχεί σε ελλειπτικό 2 ^{ου} είδους) $\sqrt{1-0,25\eta\mu^2 t}$	?

Σας Ευχαριστώ!